Ejercicios Electrodinámica Cuántica. Capítulo 14

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

14 de septiembre de 2023

1. Calcular $\left\langle e^-_{r_3}(\vec{p}_3)e^+_{r_4}(\vec{p}_4)\right|\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\nu\psi^+(x_2)\left|e^-_{r_1}(\vec{p}_1)e^+_{r_2}(\vec{p}_2)\right\rangle$

Javier ya ha demostrado en el capítulo 14 que

$$\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\nu\psi^+(x_2)\left|e^-_{r_1}(\vec{p}_1)e^+_{r_2}(\vec{p}_2)\right\rangle = \bar{v}_{r_2}(\vec{p}_2)\gamma^\nu u_{r_1}(\vec{p}_1)e^{-i(p_1+p_2)x_2}\left|0\right\rangle$$

Vamos a calcular pues lo que falta:

$$\left\langle e^-_{r_3}(\vec{p}_3)e^+_{r_4}(\vec{p}_4)\right|\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1) \tag{1}$$

Usando la ecuación 82.1 del curso de Teoría Cuántica de Campos, tenemos que

$$\left\langle e^-_{r_3}(\vec{p}_3)e^+_{r_4}(\vec{p}_4)\right| = \left\langle 0\right| d_{r_4}(\vec{p}_4)c_{r_3}(\vec{p}_3)\sqrt{2E_3}\sqrt{2E_4} \tag{2}$$

que podemos sustituir en la ecuación (1):

$$\left\langle 0\right| d_{r_4}(\vec{p}_4)c_{r_3}(\vec{p}_3)\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\sqrt{2E_3}\sqrt{2E_4} \tag{3}$$

Sabemos que $\bar{\psi}^-$ es el operador que crea electrones, y como cualquier operador creación, cumple con la propiedad

$$\left\langle 0\right|\bar{\psi}^- = 0$$

por lo que nuestra estrategia será mover éste operador hacia la izquierda hasta que pueda actuar sobre el estado vacío. Pero, para hacerlo tenemos que (anti)conmutar con los operadores $d_{r_4}(\vec{p}_4)$ y $c_{r_3}(\vec{p}_3)$. Es decir, antes que nada debemos calcular los siguientes anticonmutadores:

$$\left\{c_{r_3}(\vec{p}_3), \bar{\psi}^-(x_1)\right\}, \qquad \left\{d_{r_4}(\vec{p}_4), \bar{\psi}^-(x_1)\right\}$$

Usando la ecuación 10.2 de Electrodinámica Cuántica, podemos reescribir los anticonmutadores de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\left\{c_{r_3}(\vec{p}_3), \bar{\psi}^-(x_1)\right\} &= \left\{c_{r_3}(\vec{p}_3), \sum_r\int\frac{1}{\sqrt{2E_p}}c^\dagger_r(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p})e^{ipx_1}\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\right\}\\ &= \sum_r\int\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left\{c_{r_3}(\vec{p}_3), c^\dagger_r(\vec{p})\right\}\bar{u}_r(\vec{p})e^{ipx_1}\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\end{aligned}$$

Usando las relaciones de anticonmutación 9.4

$$\left\{c_{r_3}(\vec{p}_3), c^\dagger_r(\vec{p})\right\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}_3-\vec{p})\delta_{rr_3}$$

obtenemos

$$\left\{c_{r_3}(\vec{p}_3), \bar{\psi}^-(x_1)\right\} = \sum_r\int\frac{1}{\sqrt{2E_p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}_3-\vec{p})\delta_{rr_3}\bar{u}_r(\vec{p})e^{ipx_1}\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} = \frac{1}{\sqrt{2E_3}}\bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)e^{ip_3x_1}$$

De forma similar, podemos calcular el otro anticonmutador

$$\left\{d_{r_4}(\vec{p}_4), \bar{\psi}^-(x_1)\right\} = \sum_r\int\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left\{d_{r_4}(\vec{p}_4), c^\dagger_r(\vec{p})\right\}\bar{u}_r(\vec{p})e^{ipx_1}\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} = 0$$

Ahora podemos proseguir con nuestra estrategia, mover $\bar{\psi}^-$ hacia la izquierda en la ecuación (3)

$$\begin{aligned}\langle 0| d_{r_4}(\vec{p}_4)c_{r_3}(\vec{p}_3)\bar{\psi}^-(x_1)\sqrt{2E_3} &= \bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)e^{ip_3x_1}\langle 0| d_{r_4}(\vec{p}_4) - \langle 0| d_{r_4}(\vec{p}_4)\bar{\psi}^-(x_1)c_{r_3}(\vec{p}_3)\sqrt{2E_3} \\ &= \bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)e^{ip_3x_1}\langle 0| d_{r_4}(\vec{p}_4) + \cancel{\langle 0|\bar{\psi}^-(x_1)}d_{r_4}(\vec{p}_4)c_{r_3}(\vec{p}_3)\sqrt{2E_3}\end{aligned}$$

Por lo que nos queda la relación

$$\langle 0| d_{r_4}(\vec{p}_4)c_{r_3}(\vec{p}_3)\bar{\psi}^-(x_1)\sqrt{2E_3} = \bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)e^{ip_3x_1}\langle 0| d_{r_4}(\vec{p}_4)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (3) obtenemos

$$\bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)e^{ip_3x_1}\gamma^\mu\langle 0| d_{r_4}(\vec{p}_4)\psi^-(x_1)\sqrt{2E_4}$$

De nuevo, nuestra estrategia es mover el operador $\psi^-(x_1)$ hacia la izquierda, por lo que debemos calcular el anticonmutador

$$\begin{aligned}\left\{d_{r_4}(\vec{p}_4), \psi^-(x_1)\right\} &= \sum_r \int \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left\{d_{r_4}(\vec{p}_4), d_r^\dagger(\vec{p})\right\}v_r(\vec{p})e^{ipx_1}\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \\ &= \sum_r \int \frac{1}{\sqrt{2E_p}}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}_4-\vec{p})\delta_{rr_4}v_r(\vec{p})e^{ipx_1}\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} = \frac{1}{\sqrt{2E_4}}v_{r_4}(\vec{p}_4)e^{ip_4x_1}\end{aligned}$$

Donde ahora debemos usar las fórmulas 10.1 y 9.4. Y podemos finalizar nuestro cálculo:

$$\bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)\gamma^\mu v_{r_4}(\vec{p}_4)e^{i(p_3+p_4)x_1}\langle 0| - \bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)e^{ip_3x_1}\gamma^\mu\cancel{\langle 0|\psi^-(x_1)}d_{r_4}(\vec{p}_4)\sqrt{2E_4}$$

llegando a la conclusión final;

$$\left\langle e^-_{r_3}(\vec{p}_3)e^+_{r_4}(\vec{p}_4)\right|\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1) = \bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)\gamma^\mu v_{r_4}(\vec{p}_4)e^{i(p_3+p_4)x_1}\langle 0|$$

Juntando este resultado con el resultado de Javier, obtenemos

$$\begin{aligned}&\left\langle e^-_{r_3}(\vec{p}_3)e^+_{r_4}(\vec{p}_4)|\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\nu\psi^+(x_2)|e^-_{r_1}(\vec{p}_1)e^+_{r_2}(\vec{p}_2)\right\rangle \\ &\qquad = \bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)\gamma^\mu v_{r_4}(\vec{p}_4)\bar{v}_{r_2}(\vec{p}_2)\gamma^\nu u_{r_1}(\vec{p}_1)e^{-i(p_1+p_2)x_2}e^{i(p_3+p_4)x_1}\end{aligned}$$

Y el resultado completo sería

$$\begin{aligned}&{}_{\text{out}}\left\langle e^-_{r_3}(\vec{p}_3)e^+_{r_4}(\vec{p}_4)|e^-_{r_1}(\vec{p}_1)e^+_{r_2}(\vec{p}_2)\right\rangle_{\text{in}} \\ &\sim q^2\,\overline{A_\mu(x_1)A_\nu}(x_2)\left\langle e^-_{r_3}(\vec{p}_3)e^+_{r_4}(\vec{p}_4)|\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\nu\psi^+(x_2)|e^-_{r_1}(\vec{p}_1)e^+_{r_2}(\vec{p}_2)\right\rangle + \cdots \\ &= q^2\bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)\gamma^\mu v_{r_4}(\vec{p}_4)\bar{v}_{r_2}(\vec{p}_2)\gamma^\nu u_{r_1}(\vec{p}_1)\int\frac{-g_{\mu\nu}}{p^2+i\varepsilon}e^{-i(p_1+p_2-p)x_2}e^{i(p_3+p_4-p)x_1}\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4} + \cdots\end{aligned}$$

Es importante recalcar que en el desarrollo que ha hecho Javier, se han ignorado muchos términos, para centrarnos únicamente en el que aparece en esta última expresión. Aunque para la mayoría de los términos existe una buena razón para ignorarlos, hay uno en particular que también debe tenerse en cuenta, pues es igual de importante que el que acabamos de calcular. En el capítulo, Javier hace lo siguiente:

$$\mathrm{N}[\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2)] = \bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\nu\psi^+(x_2) + \cdots$$

Vamos a ver cuáles son los términos que ignoró Javier en este paso: de forma general podemos escribir

$$\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2) = [\bar{\psi}^+(x_1)+\bar{\psi}^-(x_1)]\gamma^\mu[\psi^+(x_1)+\psi^-(x_1)][\bar{\psi}^+(x_2)+\bar{\psi}^-(x_2)]\gamma^\nu[\psi^+(x_2)+\psi^-(x_2)]$$

Por lo que en realidad aparecen 15 términos además del que Javier ha considerado, por suerte casi todos estos se anulan al hacer el *sandwich* con los estados inicial y final (después de aplicar el *normal ordering*). Esto lo podemos ver fácilmente de la siguiente forma; el estado inicial es $\left|e^-_{r_1}(\vec{p}_1)e^+_{r_2}(\vec{p}_2)\right\rangle$, es decir está formado por un electrón y un positrón. La única forma de que un término sobreviva actuando sobre este estado es que contenga como mucho dos operadores aniquilación: uno para electrones y otro para positrones, cualquier otro operador aniquilación hará que este término se anule. Es decir, los términos que tengan más de un campo ψ^+ o más de un campo $\bar{\psi}^+$ se anularán. Esto reduce de 16 términos a solo 9.

Por otra parte, el estado final es $\langle e^-_{r_3}(\vec{p}_3)e^+_{r_4}(\vec{p}_4)\big|$, de nuevo solo contiene un electrón y un positrón, por lo que cualquier término que cree más de un electrón ($\bar{\psi}^-$) o más de un positrón (ψ^-) se anulará al actuar sobre el estado final. Esto reduce la lista a un total de 4 términos que sobreviven:

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi}(x_1)\gamma^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\gamma^\nu\psi(x_2) =& \bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\nu\psi^+(x_2) + \bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\mu\psi^+(x_1)\bar{\psi}^-(x_2)\gamma^\nu\psi^-(x_2) \\
&+ \bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^+(x_1)\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\nu\psi^-(x_2) + \bar{\psi}^+(x_1)\gamma^\mu\psi^-(x_1)\bar{\psi}^-(x_2)\gamma^\nu\psi^+(x_2) \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

Donde los puntos suspensivos representan los demás 12 términos que sabemos que se anularán. De estos 4, en realidad los dos primeros y los dos últimos son el mismo bajo el cambio $x_1 \leftrightarrow x_2$. Pero lo importante es que hay otro término, que es realmente distinto al que ha presentado Javier, y éste debe ser tomando en cuenta para cualquier cálculo. Usando los mismos argumentos podemos calcular lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle e^-_{r_3}(\vec{p}_3)e^+_{r_4}(\vec{p}_4)|\mathrm{N}[\bar{\psi}^-(x_1)\gamma^\mu\psi^+(x_1)\bar{\psi}^+(x_2)\gamma^\nu\psi^-(x_2)]|e^-_{r_1}(\vec{p}_1)e^+_{r_2}(\vec{p}_2)\right\rangle \\
&\qquad = -\bar{u}_{r_3}(\vec{p}_3)\gamma^\mu u_{r_1}(\vec{p}_1)\bar{v}_{r_4}(\vec{p}_4)\gamma^\nu v_{r_2}(\vec{p}_2)e^{i(p_3-p_1)x_1}e^{i(p_4-p_2)x_2}
\end{aligned}
$$